Edreiの問題と関連する諸問題 (有理型函数,正則曲線の値分布)

小沢, 満

数理解析研究所講究録
348巻 1979年 1-17

Edrei の問題と関連する諸問題

東工大理　　小沢 満

Hayman の問題集[4] にある Edrei による問題 2.25 はつぎのように述べうる: f, g は位数 ρ $(<\infty)$ の一次独立な整函数とする. Wronskian $fg'-f'g$ の位数が ρ より小であれば, ρ は半整数 $n/2$ $(n \geq 2)$?

$f=\exp z^{\rho}$, $g=\exp(-z^{\rho})$ が ρ が整数である例である. $w''-z^{n}w=0$ の独立な解が半整数の例を与える.

函数論特に値分布論で半整数が関係する問題は数多く存在する. しかも解けているものは極めて少ない. この半整数の壁を打破する有効な手段を求めることは最も重要な課題である. 本報告では Edrei の問題に対する一つの方法, および F. Nevanlinna の問題との関係について述べる. さらに常微分方程式論での一つの問題についてのいくつかの結果について述べる.

§1. 準備.

$f(z) = \sum a_n z^n$ は整函数とする。 $|z| = r$ を固定すると $|a_n| r^n \geqq |a_j| r^j$ がすべての j についてなりたつ n がある。このような n の最大を central index といい、$n(r)$ と表わす。$\mu(r) = |a_{n(r)}| r^{n(r)}$, $M(r) = max_{|z|=r} |f(z)|$ とおく。このとき

1). $n(r)$ は単調増加で f が超越的ならば $n(r) \to \infty$ $(r \to \infty)$.

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r) \left\{1 + 2n\left(r + \frac{r}{n(r)}\right)\right\},$$

$$\log \mu(r) = \log \mu(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t} dt,$$

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r) \{\log \mu(r)\}^{\frac{1}{2}+\delta}, \qquad \delta > 0$$

以上より

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

2). $|f(z)| = M(r)$, $|z| = r$ である z に対して

$$f^{(p)}(z) = \left(\frac{n(r)}{z}\right)^p f(z)\,(1 + \varepsilon_p),$$

$$\varepsilon_p = \frac{h_p(z)}{n(r)^\gamma}, \qquad |h_p(z)| < K, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

が対数測度 $< \infty$ な集合 Δ 以外の r で $r \to \infty$ とするときなりたつ。

これらの結果については [5] 参照。Wiman-Valiron の方法といわれている。整函数論への応用の外に線形常微分方程式への有効な応用が著しい。

3). Besicovitch の定理 [1].

$$X = \{ r \mid m(r) > M(r)^{\cos \pi \rho'} \}$$ の upper density

$$\geqq 1 - \frac{\rho}{\rho'} .$$

ここで ρ は整函数 f の位数, $\rho < \rho' < 1/2$, $m(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|$.

4). Hille [6]. 定理 4.5.1.

$f(z)$ は有限位数 ρ の有理型函数とする. このとき

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqq 18 \, |z|^{\gamma}, \qquad \gamma > 1 + 3\rho$$

が長さ有限な区間列以外の $|z|$ に対して成り立つ.

5). Tsuji [8]. 定理 III. 68.

D は無限領域. $f(z)$ は $\bar{D}$ で正則, ∂D 上で $|f(z)| \leqq 1$.

$M(r, D) = \max_{z \in D, |z|=r} |f(z)|$. D 中に $|f(z_0)| > 1$ なる点 z_0 があれば,

$$\log \log M(r, D) \geqq \pi \int_1^{\kappa r} \frac{dr}{r \, \theta(r)} - \text{const}. \quad (0 < \kappa < 1)$$

ここで $r\,\theta(r)$ は $D \cap \{|z| = r\}$ の長さである.

§2. Edrei の問題.

条件を量的にして $m(r, fg' - f'g) = o(m(r, f))$ とする.

$P = fg' - gf'$, $P' = fg'' - gf''$, $Q = fg''' - gf'''$,

$R = P'' - Q$

とおく. このとき

$$P'' = Q + f'g'' - g'f'' = Q - Pf''/f + P'f'/f$$

により微分方程式

$$Pf'' - P'f' + Rf = 0$$

が得られる.

6). P が多項式の場合.

$$m(r, R) \leqq m(r, P) + m(r, P') + m(r, \frac{f''}{f}) + m(r, \frac{f'}{f})$$
$$= O(\log r)$$

によって R も多項式となる. 2) によって $|\zeta| = r \notin \Delta$ に対して

$$\left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 (1+\varepsilon'') - \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} \frac{n(r)}{\zeta}(1+\varepsilon') + \frac{R(\zeta)}{P(\zeta)} = 0,$$

$$|f(\zeta)| = \max_{|z|=|\zeta|} |f(z)|.$$

$P = a_p z^p + \cdots, \quad Q = b_q z^q + \cdots$ とおくと

$$n(r)^2(1+\varepsilon'') - p\, n(r)(1+\varepsilon_1)$$
$$+ \left(p(p-1) - \frac{b_q}{a_p} \zeta^{q-p+2}\right)(1+\varepsilon) = 0.$$

$n(r) \longrightarrow \infty \ (r \to \infty)$ より $q - p + 2 \geqq 1$. よって

$$n(r) \sim c\,|\zeta|^{1+(q-p)/2} \qquad |\zeta| \notin \Delta, \quad \zeta \to \infty.$$

一方 f の位数は対数測度有限な集合の除外に影響されないから, 1) によって f の位数 $= 1 + \frac{q-p}{2}$ である.

この場合 f の位数 $= 1/2$ となることはない. 何故ならば, f の位数 $= 1/2$ とすると $q = p-1$ である. よって $R = f'g'' - g'f''$ の次数 $q = p-1$. f', g' の Wronskian R が多項式であるから

$$R f''' - R' f'' + R_1 f' = 0$$

がなりたつ. ここで R_1の次数 $= p-2$. 以下この操作をつづけると

$$R_{p-2} f^{(p+1)} - R'_{p-2} f^{(p)} + R_{p-1} f^{(p-1)} = 0$$

がえられ, R_{p-1} の次数 $= 0$ となる.

$R_{p-1} \equiv 0$ のとき $f^{(p)} = C R_{p-2}$ となり, fは多項式になるから除外してよい. $R_{p-1} \neq 0$ しかし定数のとき, もう一回上のことを行なうと

$$R_{p-1} f^{(p+2)} \qquad + R_p f^{(p)} = 0.$$

R_p は多項式でその次数 $= -1$. これは矛盾である.

7). $P = p e^L$, p, L : 多項式 の場合.

$$m(r, R e^{-L}) \leqq m(r, \frac{R}{P}) + m(r, p) = O(\log r)$$

により, $R e^{-L} = s$ は多項式. よって $R = s e^L$. 方程式に代入し e^L を除けば

$$p f'' - (p' + p L') f' + s f = 0$$

となるから 6) の場合になる.

Rが多項式のときには $R f''' - R' f'' + S f' = 0$ となる. よってこのときにも 6) の場合になる. $R = r e^L$, r, L 多項式の場合も同様である.

以上の結果は明らかに最終的なものではない. RとPとの間にはある種の関係がある. それは

$$R^2 - RP'' + P'R' \quad \text{は } P \text{ の倍数}$$

である．つぎに微分方程式を $f = wP^{1/2}$ によって

$$w'' + q\,w = 0, \qquad q = \frac{R}{P} - \frac{3}{4}\frac{P'^2}{P^2} + \frac{1}{2}\frac{P''}{P}$$

と変換しておく．w は一般に 2 価代数型となる．

§3．F. Nevanlinna の問題との関係．

F. Nevanlinna の問題は

$\sum \delta(a, f) = 2$ ならば，f の位数は半整数 $m/2$？

この問題については Weitsman によって $m \geqq 2$ が示されている．f の位数が有限である場合だけが問題である．

Schwarzian $\{f, z\} = \dfrac{f'''}{f'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2$ についてつぎのことは知られている．$f' = 0$ または ∞ である点では $\{f, z\}$ は二重極であり，その他の点では正則である．

$\sum \delta(a, f) = 2$ ならば，$\delta(0, f') = 1$，$N(r, 0, f') = o(T(r, f))$.

さらに $2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f') = o(T(r, f))$．よって

$$\{f, z\} = A$$

とおくと，A は二重極のみをもつ有理型函数であり，二重極の個数函数 $= o(T(r, f))$ をみたす．

特に f が重複値（有限または ∞）を持たないならば，A は整函数となる．Schwarzian の式よりこのときには A は多項式となる．F. Nevanlinna はこの場合に問題を解いた．F. Nevanlinna の方法は問題を $w'' + q(z)\,w = 0$，$\{f, z\} = 2q(z)$

を解くことに帰着させ，ついで Hille による漸近解を求める方法を応用した．しかし $q(z)$ が二重極を無限個もつ場合には Hille の方法は適用出来ない．Edrei の問題も二重極を無限にもつ場合になっている．この意味で同一の困難に出会っていることになる．ところがもっと密接に関係していることが示される．Edrei の問題を変換する．

$$F = g/f$$

とおくと，$F' = (g'f - gf')/f^2$．ここで $m(r, g'f - gf') = o(m(r, f))$ により

$$N(r, 0, F') = o(m(r, f)),$$

$$m(r, 1/F') \leqq 2\, m(r, f) + m(r, 1/(g'f - f'g))$$

$$= 2(1 + o(1))\, m(r, f).$$

よって

$$T(r, F') \leqq 2(1 + o(1))\, m(r, f).$$

一方 $\quad 2\, m(r, f) \leqq m(r, 1/F') + m(r, g'f - f'g)$ より

$$2(1 + o(1))\, m(r, f) \leqq T(r, F')$$

よって

$$T(r, F') = 2(1 + o(1))\, m(r, f).$$

これより

$$N(r, 0, F') = o(T(r, F))$$

さらに f, g の共通零点の個数函数 $= o(m(r, f))$ としてよい

から

$$2N(r,\infty,F)-N(r,\infty,F')=o(T(r,F)).$$

よって $\{F, z\} = A$ とおくと，Aは二重極のみをもつ有理型函数であり，二重極の個数函数$=o(T(r,F))$である．これはまさしくF. Nevanlinnaの問題が最初に出会っている問題である．

§4. 微分方程式論での一つの問題．

$w''+P(z)w'+Q(z)w=0$，P: 超越整函数，Q: 多項式 を考える．まず容易にわかることは一般解の位数が∞であることである．ところが特殊解が有限位数を持つことはありうる．例: $w''+e^z w'-w=0$ の解 $w=e^{-z}-1$．

問題． 如何なるP, Qの対に対して特殊解の位数有限となるか？ このとき特殊解の位数は整数であるか？ さらにPの位数は整数であるか？

このような基本的な問題が残っているのが奇妙でもある．が係数が超越的な場合にはやむを得ないようである．

8) $P(z)$の位数$<1/2$ならば，解はすべて位数∞である．

証明． Wiman-Valironの方法による．$|\zeta|=r \notin \Delta$，$|w(\zeta)| = \max_{|z|=r}|w(z)|$，

$$\left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2(1+\varepsilon'')+P(\zeta)\frac{n(r)}{\zeta}(1+\varepsilon')+Q(\zeta)=0.$$

$m(r) = \inf_{|z|=r} |P(z)|$, $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$ とおくと

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1+|\varepsilon''|) \geqq |P(\zeta)| \frac{n(r)}{r}(1-|\varepsilon'|) - |Q(\zeta)|$$
$$\geqq m(r)\frac{n(r)}{r}(1-|\varepsilon'|) - Ar^k.$$

Besicovitch の定理により，P の位数 $\rho < 1/2$，$\rho < \rho' < 1/2$ として

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1+|\varepsilon''|) \geqq M(r)^{\cos\pi\rho'} \frac{n(r)}{r}(1-|\varepsilon'|) - Ar^k$$

が $r \in X \cap \Delta^c$ でなりたつ．ここで X の upper density $\geqq 1-\rho/\rho'$.

故に $r \in X \cap \Delta^c$ で $\forall S$ に対して

$$\left(\frac{n(r)}{r}\right)^2 (1+|\varepsilon''|) \geqq r^{S\cos\pi\rho'} \frac{n(r)}{r}(1-|\varepsilon'|) - Ar^k.$$

よって，$n(r) \geqq r^{S'}$，$\forall S'$．これより

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r)}{\log r} \geqq S'.$$

S' は任意によって，解の位数 $= \infty$.

9). $w'' + e^z w' + Qw = 0$，Q：多項式 が有限位数の整函数解をもつとする．このとき

(i) $w'(z)$ は $D: -\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{2}-\varepsilon$ $({}^\forall\varepsilon>0)$ で一様有界.

(ii) $w'(z) \longrightarrow 0$，$w'' \longrightarrow 0$ $(z \to \infty,\ z \in D)$.

(iii) $w(z) \longrightarrow w(0) + a_0$ $(z \to \infty,\ z \in D)$

$$a_0 = \int_0^\infty w'(t)\,dt \qquad t：実正数.$$

(iv) $w(0)+a_0 \neq 0$.

証明. (i). 4) によって $r=|z| \notin \Delta$ のとき $(z \in D)$

$$|e^z||w'(z)| \leqq 18|z|^\gamma |w'(z)| + |Q(z)||w(z)|.$$

$$|w(z)| - |w(0)| \leqq \int_0^r |w'(t)||dt| \leqq r\, M_1(r,\theta),$$

$$M_1(r,\theta) = \max_{0 \leqq |t| \leqq r} |w'(|t|e^{i\theta})|.$$

よって, $|z| \notin \Delta$ に対して

$$(e^{r\cos\theta} - 18 r^\gamma)|w'(z)| \leqq (r\, M_1(r,\theta) + |w(0)|)\,|Q(z)|.$$

$M_1(r,\theta)$ は r の単調増加な連続函数であることより, $M_1(r,\theta)$ が $r \to \infty$ のとき非有界ならば, $\exists\, r_m = |z_m| \notin \Delta$, $z_m \in D$, $|w'(z_m)| = M_1(r_m,\theta)$, $z_m = r_m e^{i\theta}$, これより

$$\left(e^{r_m \cos\theta} - 18 r_m^\gamma - r_m |Q(z_m)|\right)|w'(z_m)| \leqq |w(0)||Q(z_m)|.$$

よって $w'(z_m) \longrightarrow 0$ $(m \to \infty)$. これは矛盾. よって $M_1(r,\theta)$ は有界である. $M_1(r,\theta)$ は θ についても連続であるから $M_1(r,\theta)$ は一様有界 $(re^{i\theta} \in D)$. よって $|w'(z)|$ は $z \in D$ ならば一様有界である.

(ii). (i) により $|w'(z)| \leqq K$ $(z \in D)$. さらに

$$|w''(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|w'(z+\rho e^{i\varphi})|}{\rho^2}\rho\, d\varphi \leqq \frac{K}{\rho}.$$

$$|w(z)| \leqq |w(0)| + r K$$

により

$$e^{r\cos\varepsilon}\,|w'(z)| \leqq |Q(z)|\left(rK+|w(0)|\right)+\frac{K}{s}.$$

これより

$$w'(z)\longrightarrow 0 \quad (z\longrightarrow\infty,\ z\in D).$$

さらに

$$|w''(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{s}\max_{0\leqq\theta\leqq 2\pi}|w'(z+se^{i\theta})|\cdot 2\pi$$

によって，　$w''(z)\longrightarrow 0 \quad (z\longrightarrow\infty,\quad z\in D).$

(iii). 　$Q(z)=A_0+\cdots+A_nz^n$ とし，　$\hat{Q}(z)=|A_0|+\cdots+|A_n|z^n$ とおく．このとき　$se^{i\varphi}\in D_\varepsilon=\{z\,|\,0\leqq|z|<\infty,\ -\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\leqq\arg z\leqq\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\}$

$$|w'(se^{i\varphi})| \leqq \frac{|w''(se^{i\varphi})|+\hat{Q}(s)\,|w(se^{i\varphi})|}{e^{s\cos\varphi}}.$$

(ii) により　$|w''(se^{i\varphi})|\leqq K$，　$|w(se^{i\varphi})|\leqq K(s+1)$　としてよい．よって

$$|w'(se^{i\varphi})| \leqq K\frac{\hat{Q}(s)(s+1)+1}{e^{s\cos\varphi}}.$$

これより

$$a_0=\int_0^\infty w'(t)\,dt,\qquad t:\text{実正数}$$

は存在する．さらに

$$\int_0^\infty w'(te^{i\theta})\,e^{i\theta}dt,\ \left(-\frac{\pi}{2}+2\varepsilon\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}-2\varepsilon\right)$$

も存在する．そして a_0 に等しい．そこで　$se^{i\varphi}\in D_\varepsilon$ とし

$$|w(z)-w(0)-a_0|$$

$$= \left| \int_0^{s e^{i\varphi}} w'(u)\,du - \int_0^{\infty} w'(t)\,dt \right|$$

$$= \left| -\int_s^{\infty} w'(t)\,dt + \int_s^{s e^{i\varphi}} w'(u)\,du \right|$$

$$\leqq \left| \int_s^{\infty} w'(t)\,dt \right| + \int_0^{\varphi} |w'(s e^{i\eta})|\, s\, d\eta$$

$$\longrightarrow 0 \quad (s \longrightarrow \infty)$$

よって

$$\exists \lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in D_\varepsilon}} w(z) = w(0) + a_0 .$$

(iv). $w(0) + a_0 = 0$ とする. $s e^{i\varphi} \in D_\varepsilon$ なるとき

$$|w(s e^{i\varphi})| = |w(s e^{i\varphi}) - w(0) - a_0| = \left| \int_s^{\infty} w'(t e^{i\varphi})\, dt\, e^{i\varphi} \right|$$

$$\leqq \int_s^{\infty} \frac{K\{\hat{Q}(t)(t+1)+1\}}{e^{t\cos\varphi}}\, dt$$

$$\leqq K \frac{\hat{Q}(s)(s+1)+1}{e^{\frac{s}{2}\cos\varphi}} \int_s^{\infty} \frac{dt}{e^{-\frac{t}{2}\cos\varphi}}$$

$$= K \frac{2}{\cos\varphi} \frac{\hat{Q}(s)(s+1)+1}{e^{s\cos\varphi}} < \frac{1}{100}.$$

上の評価では s を十分大に取れば可能である. さらに

$$|w''(s e^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{t} \max_{0 \leqq \theta \leqq 2\pi} |w'(s e^{i\varphi} + t e^{i\theta})|.$$

ここで $t = 1/s$ ととると

$$|w''(s e^{i\varphi})| \leqq s \max_{\theta} \frac{K\{\hat{Q}(s+\frac{1}{s})(s+\frac{1}{s}+1)+1\}}{e^{s\cos\varphi + t\cos\theta}}$$

$$\leqq sK\frac{\hat{Q}(s+\frac{1}{s})(s+\frac{1}{s}+1)+1}{e^{s\cos\varphi-\frac{1}{s}}}\leqq\frac{s}{100}.$$

このとき与えられた微分方程式により

$$e^{s\cos\varphi}|w'(se^{i\varphi})|\leqq\frac{\hat{Q}(s)}{100}+\frac{s}{100}.$$

故に

$$|w'(se^{i\varphi})|\leqq\frac{1}{100}\frac{\hat{Q}(s)+s}{e^{s\cos\varphi}}\leqq\frac{1}{100^2}.$$

この評価より再び

$$|w(se^{i\varphi})|\leqq\frac{1}{100}\frac{2}{\cos\varphi}\frac{\hat{Q}(s)+s}{e^{s\cos\varphi}}\leqq\frac{1}{100^2}$$

$$|w''(se^{i\varphi})|\leqq s\max_{0\leqq\theta\leqq2\pi}|w'(se^{i\varphi}+\frac{1}{s}e^{i\theta})|$$

$$\leqq s\frac{1}{100}\frac{\hat{Q}(s+\frac{1}{s})+s+\frac{1}{s}}{e^{s\cos\varphi-\frac{1}{s}}}\leqq\frac{s}{100^2}$$

これより

$$|w'(se^{i\varphi})|\leqq\frac{1}{e^{s\cos\varphi}}\frac{1}{100^2}(\hat{Q}(s)+s)\leqq\frac{1}{100^3}.$$

以下この操作を繰返えすと

$$|w(se^{i\varphi})|\leqq\frac{1}{100^p}.$$

$p\to\infty$ として $\forall s\geqq s_0$ に対し

$$w(se^{i\varphi})\equiv0.$$

これは矛盾である。

注意. 9) では特に簡単な場合について述べたが，9) 全体は

より一般な場合にも成り立つ。$w''+P(z)w'+Q(z)w=0$ で $P(z)$ がある角領域 A で超越的に ∞ に発散する場合にも証明出来る。●

10) $w''+P(z)w'+Q(z)w=0$ で $P(z)$ は有限個の放射線 $l_1,\cdots,l_p$ 以外の放射線に沿って $z\longrightarrow\infty$ とすると超越的に ∞ に発散するとする。さらに $l_j\ (j=1,\cdots,p)$ に沿っては $P(z)$ が有界ならば，すべての解は位数 ∞ である。

証明）。$l_1,\cdots,l_p$ を含む任意に小さな角領域のすべてにおいて $w'(z)$ が有界であれば，$w'(z)$ が全有限平面で有界となるから矛盾。よって l_1 を含む任意に小さな角領域 A_ε で $w'(z)$ は非有界としてよい。A_ε の両隣りにおいて $|w'(z)|\leqq K$ としてよい。ここで $|w'(z)|/K\geqq 2$ である領域で無限であるものを考える。これを D とする。ここで 5) を適用する。

このとき $\theta(r)\leqq 2\varepsilon$ により

$$\log\log M(r,D)\geqq\pi\frac{1}{2\varepsilon}\int_1^{\kappa r}\frac{dr}{r}-\text{const}$$

$$=\frac{\pi}{2\varepsilon}\log\kappa r\ -C.$$

よって

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,D)}{\log r}=\frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

ε は任意であるから，w' の位数 $=\infty$。これは矛盾。

例. $w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0$ で

① $P(z) = \sum_{n=-N}^{M} a_n e^{nz}$, $a_M \neq 0$, $a_{-N} \neq 0$, $M, N > 0$.

② $P(z) = a(z) z^{-n} \sin z^n$, a : 多項式.

③ $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^2}\right)$.

11) Frei の定理 [2] の別証.

$w'' + e^z w' + cw = 0$ (c : 定数) が有限位数な解を持つならば, $c = -n^2$.

以下の証明は T. Kobayashi による.

$w_1(z)$, $w_2(z)$ は上の方程式の独立な解で $w_1(z)$ の位数有限とする. $w_2(z)$ は当然位数 ∞ である. $w_1(z+2\pi i)$ もまた解であり, 有限位数をもつから

$$w_1(z+2\pi i) = c_1 w_1(z).$$

ところが右半平面で $z \to \infty$ とすると 9) によって $w_1(z) \to A \neq 0$, $w_1(z+2\pi i) \to A \neq 0$. よって $c_1 = 1$. ゆえに

$$w_1(z+2\pi i) = w_1(z).$$

以上によって $0 < |x| < \infty$ で一価正則な函数 $f(x)$ により

$$w_1(z) = f(e^{-z}).$$

ところが $w_1(z) \to A \neq 0$ ($z \to \infty$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$) により $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ となる. $a_0 = A$ である. これを微分方程式に代入すると

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right)'' + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right)' e^{z} + c\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-jz}\right) = 0.$$

これより

$$(n^2 + c)a_n = (n+1)a_{n+1} \quad (n \geqq 1), \quad a_1 = ca_0.$$

ここで $c \neq -n^2$ がすべての正整数 n に対して成り立つとすると,

$$|a_n|/|a_{n+1}| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

これは $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ の収束半径 $= 0$ となり, 矛盾. 以上より $c = -n^2$ となる正整数 n がある. このとき $a_{n+j} = 0$ $\forall j \geqq 1$ となり, $f(x) = \sum_0^n a_j x^j$. a_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ は簡単な計算で求まる.

文　献

[1] Besicovitch, A. S. On integral functions of order < 1. Math. Ann. 27 (1927), 677 − 695.

[2] Frei, M. Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-z}w' + \text{konst.}\, w = 0$. Comm. Math. Helv. 36 (1961), 1 − 8.

[3] Fuchs, W. H. J. Topics in Nevanlinna theory. Proc. NRL Conf. Classical Function Theory. Naval Research Laboratory (1970), 1 − 32.

[4] Hayman, W. K. Research problems in function theory. Athlone Press. London (1967).

[5] Hayman, W. K. The local growth of power series: A survey of the Wiman-Valiron method. Canad. Math. Bull. 17 (1974), 317–358.

[6] Hille, E. Ordinary differential equations in the complex domain. Wiley & Sons. New-York (1976).

[7] Nevanlinna, F. Über eine Klasse meromorpher Funktionen. 7 Congress Math. Scand. Oslo (1929).

[8] Tsuji, M. Potential theory in modern function theory. Maruzen. Tokyo (1959).

[9] Valiron, G. Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles. Bull. Soc. Math. France 51 (1923), 33–45.

[10] Wittich, H. Subnormale Lösungen der Differentialgleichung $w'' + p(e^z)w' + q(e^z)w = 0$. Nagoya Math. J. 30 (1967), 29–37.